Berthelin
Rouvière (dev 2)

Leçon 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 ou 2.

I. Généralités

1. Vocabulaire

Définition 1.1 Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue. On appelle équation différentielle : $y' = f(t, y)$, $(t, y) \in U$. (E)

Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

- $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$
- $\forall t \in I$, $f(t, y(t)) = y'(t)$

Remarque 1.2 On peut considérer des équations de la forme $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ appelées équations différentielles d'ordre n, où y est une fonction n fois dérivable. Toutefois, on peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1, on peut donc se restreindre à ce cas là.

Exemple 1.3
$y :]1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^t$ est une solution de $y' = y$

Définition 1.4 Soit $(t_0, y_0) \in U$. Le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) consiste à trouver les solutions y de (E) sur un intervalle I telles que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Remarque 1.5 Si l'équation (E) décrit la loi d'évolution d'un système en fonction du temps t, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver l'évolution du système sachant qu'il est en $t = t_0$ dans l'état y_0.

Définition 1.6 Soient $y_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $y_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ des solutions de (E). On dit que y_2 est un prolongement de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Exemple 1.7
soit $y' = 3y^{2/3}$, $z : t \geq 0 \longmapsto t^3$ admet plusieurs prolongements sur $\mathbb{R}$

Définition 1.8 Une solution est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement strict.

Définition 1.9 Dans le cas où $U = I \times U'$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit qu'une solution est globale si elle est définie sur I tout entier.

Proposition 1.10 Une solution globale est maximale.

Contre-exemple 1.11
$y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2. Existence et unicité de solutions

Proposition 1.11 (lemme de Gronwall différentiel) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $w \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $v \in C^0(I, \mathbb{R})$. Supposons que pour tout $t \in I$, $w'(t) \leq v(t) w(t)$, alors pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $w(t) \leq w(t_0) e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$.

Proposition 1.12 (lemme de Gronwall intégral) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C^0(I, \mathbb{R})$. Supposons que $v \geq 0$ et que pour tout $t \in I$, tel que $t \geq t_0$, $u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s) u(s) ds$. Alors pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$, $u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$.

Définition 1.13 Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état si pour tout $(\tilde{t}, \tilde{y}) \in U$, il existe $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T] \times \overline{B}(\tilde{y}, r) \subset U$ et $k \geq 0$ tels que : $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

Lemme 1.14 Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \geq 0$ et $r_0 \in]0, +\infty]$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$. Soit $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps. On définit pour $y \in \overline{E} = C^0(I, \overline{B}(y_0, r_0))$, $\Phi(y) : t \in I \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$. On suppose

développement 1

que $\Phi(\tilde{E}) \subset \tilde{E}$. Alors il existe une solution globale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ au problème de Cauchy et elle est unique.

Proposition 1.15 Soit $(t_0, y_0) \in U$. Une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si :

- y est continue
- $\forall t \in I,\ (t, y(t)) \in U$
- $\forall t,\ y(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

Théorème 1.16 (Cauchy-Lipschitz global) Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution globale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

développement 1

Théorème 1.17 (Cauchy-Lipschitz local) Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, soit $(t_0, y_0) \in U$, alors il existe une unique solution maximale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ au problème de Cauchy. De plus, I est un intervalle ouvert.

Contre-exemple 1.18
L'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$ admet plusieurs solutions vérifiant $y(0) = 0$ notamment : $t \longmapsto 0$ et $t \longmapsto t \times |t|$

3. Résultats qualitatifs

Proposition 1.19 Si f est de classe C^k alors toute solution de (E) est de classe C^{k+1}.

Théorème 1.20 On se place sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz local. Soit $y :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^m$ une solution maximale de (E). Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de U quand $t \longrightarrow \alpha$ et quand $t \longrightarrow \beta$.

Corollaire 1.21 Lorsque $U = I \times \mathbb{R}^m$, on a l'alternative :

- soit $\beta = +\infty$
- soit $\beta < +\infty$ et dans ce cas, $\lim\limits_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$

Exemple 1.22
le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet pour solution $t \in]-\infty, 1[\longmapsto \dfrac{1}{1-t}$ explose lorsque $t \longrightarrow 1^-$.

II. Études de cas particuliers

1. Équations différentielles linéaires

Définition 2.1 Les équations différentielles linéaires s'écrivent sous la forme $y' = A(t)y + b(t)$, $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^m$, où $A \in C^0(I, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$.

Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz linéaire) Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ au problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire.

Proposition 2.3 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire est un espace affine de dimension m.

Proposition 2.4 (formule de Duhamel) Lorsque A et b sont constantes, la solution du problème de Cauchy (t_0, y_0) est : $t \longmapsto e^{(t-t_0)A} y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\,ds$.

Exemples 2.5
soient $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$
alors
$\begin{cases} f'(t) = Af(t) \\ f(0) = H \end{cases}$ a pour solution $t \mapsto e^{tA} H$, $\begin{cases} g'(t) = e^{tA} H \\ g(0) = 0 \end{cases}$ a $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1} A^k}{(k+1)!} H$

Application 2.6 L'exponentielle matricielle est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a :
$d(\exp)(M)(H) = e^M \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!} H$, où $\mathrm{ad}\, M(N) = MN - NM$.

développement 2

Exemple 2.7 (équations de Bernoulli) Considérons $y' = a(t).y + b(t)y^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$. On trouve les solutions non identiquement nulles via le changement $z = y^{1-\alpha}$, ce qui ramène à : $\dfrac{1}{1-\alpha} z' = a(t)z + b(t)$.

2. Équations à variables séparables

Définition 2.8 On appelle équation différentielle à variables séparables, une équation différentielle où f est de la forme $f(t,y) = g(y)h(t)$ où g et h sont continues.

Proposition 2.9 Pour les points y^* tels que $f(t,y^*) = 0$ pour tout t, que l'on appelle points stationnaires de l'équation différentielle, la fonction $t \mapsto y^*$ est solution.

Proposition 2.10 On obtient des solutions de la forme $G^{-1}(H(t)+k)$ où G est une primitive de $\frac{1}{g}$ sur un intervalle où $g \neq 0$, H est primitive de h et k est une constante.

Exemple 2.11
$t.\ln t.\, y' - y - 1 = 0$, $t > 0$

III. Systèmes autonomes

Définition 3.1 Une équation différentielle autonome est une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ avec $f : U \to \mathbb{R}^m$.

Définition 3.2 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue, localement lipschitzienne. Le portrait de phase de $y' = f(y)$ est la partition de U en trajectoires de solutions maximales de $y' = f(y)$.

On suppose que $m = 2$, $f : x \mapsto Ax$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 3.3 Soient λ_1, λ_2 valeurs propres complexes de A.

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: noeud répulsif (figure 1)
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: noeud attractif (figure 2)
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: point selle (figure 3)
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$: spirale (figure 4)
- $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R}$: centre (figure 5)

Annexe

figure 1

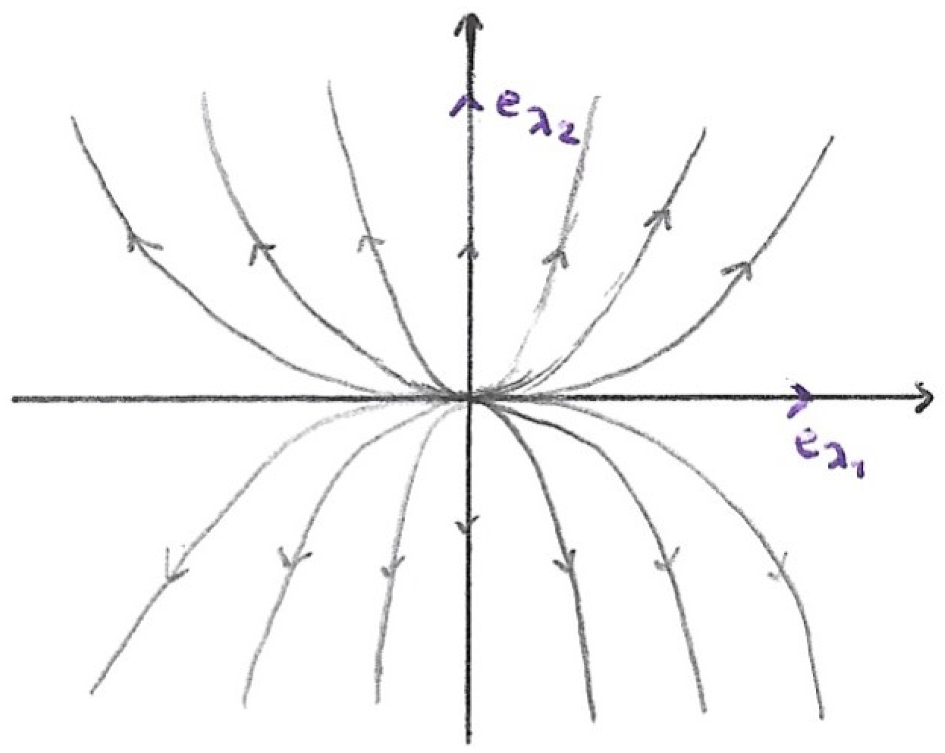

figure 2

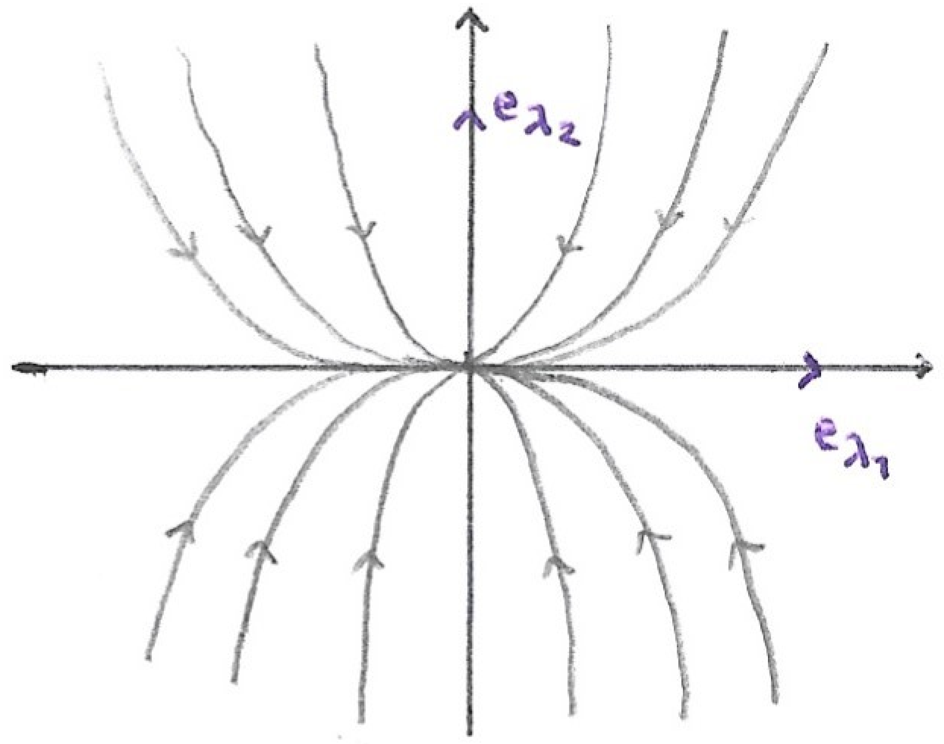

figure 3

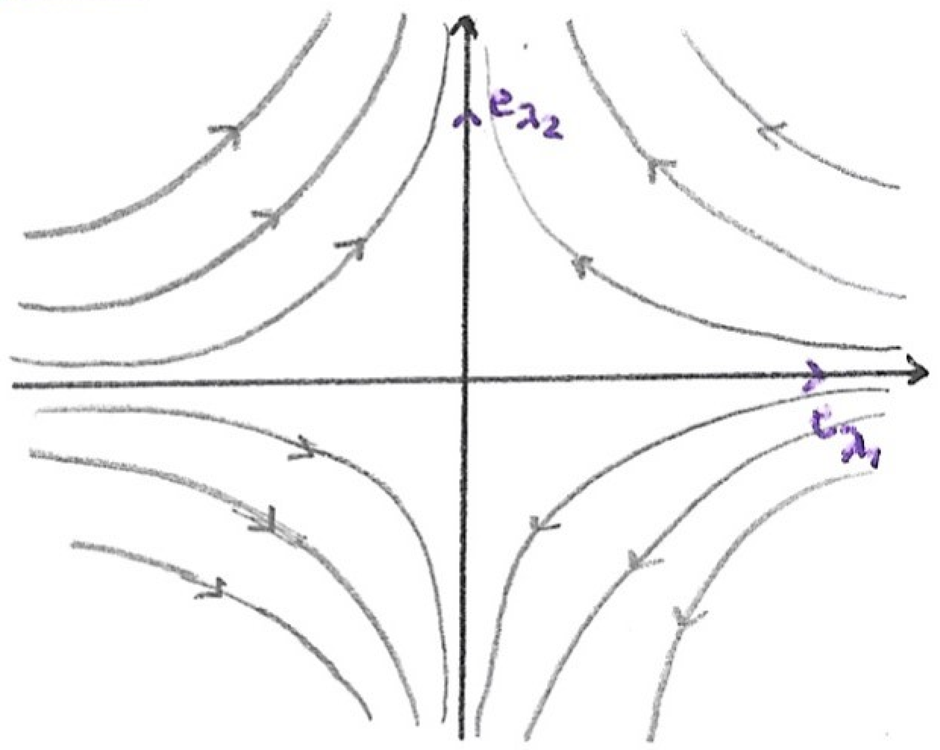

figure 4

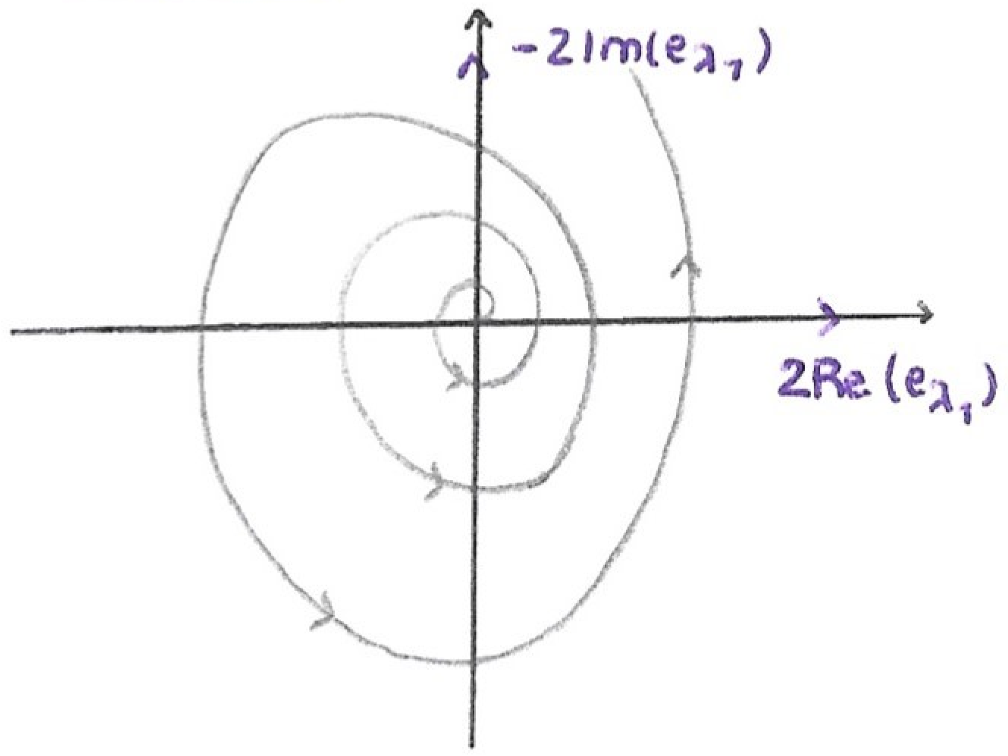

figure 5